

SUR LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE PAR DES FONCTIONS JOUISSANT DE LA PROPRIÉTÉ DE DARBOUX

PAR
SOLOMON MARCUS

W. Sierpinski a établi le résultat suivant [5; 6]:

Toute fonction réelle définie dans l'espace Z métrique connexe séparable est la somme de deux fonctions et la limite d'une suite de fonctions dont chacune transforme tout ensemble connexe, fermé, contenant plus d'un point et contenu dans Z dans l'ensemble de tous les nombres réels.

Dans ce qui suit, je me propose de donner au théorème ci-dessus le cadre le plus naturel et en même temps le plus abstrait possible, compatible avec le problème envisagé. On verra ainsi que ce théorème, contrairement aux apparences, n'a rien de topologique. En outre, je vais étudier la possibilité de représenter une fonction quelconque par le produit de deux fonctions jouissant de la propriété de Darboux.

Tous les résultats reposent, en essence, sur un lemme concernant une certaine décomposition d'un ensemble amorphe. Ce lemme, bien que nouveau, n'est qu'une exploitation et une généralisation de certains raisonnements qui remontent à F. Bernstein [1] pour reparaître en beaucoup d'autres endroits, par exemple à C. Kuratowski et W. Sierpinski [4] et à I. Halperin [2].

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Miron Nicolescu ainsi qu'au référent de ce travail pour certaines remarques qui ont permis l'amélioration de la rédaction.

1. Une certaine décomposition d'un ensemble amorphe. Partout dans ce travail a sera un nombre cardinal transfini quelconque, X sera un ensemble amorphe de cardinal a , $\mathfrak{F}$ sera une famille de cardinal a d'ensembles de cardinal a et contenus dans X , ϕ_a sera le nombre ordinal initial qui correspond au cardinal a .

LEMME. *Soit λ un nombre cardinal inférieur ou égal à $\aleph_0$. Il existe λ ensembles $B^1, B^2, \dots, B^i, \dots, B^\lambda$ contenus dans X , tels que*

$$1^\circ \bigcup_{1 \leq i \leq \lambda} B^i = X; \quad 2^\circ B^i = \bigcup_{1 \leq \gamma < \phi_a} B_\gamma^i \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda),$$

où chaque B_γ^i ($1 \leq i \leq \lambda$, $1 \leq \gamma < \phi_a$) rencontre chaque ensemble de la famille $\mathfrak{F}$ et $B_\gamma^i \cap B_{\gamma'}^{i'} \neq \emptyset$ si et seulement si $i = i'$ et $\gamma = \gamma'$.

Received by the editors May 27, 1959.

Démonstration. On va utiliser une idée de [2, p. 540]. Soit

$$(1) \quad u_1, u_2, \dots, u_\alpha, \dots (\alpha < \phi_a)$$

une suite transfinie du type ϕ_a formée avec tous les éléments de X . Soit

$$(2) \quad E_1, E_2, \dots, E_\alpha, \dots (\alpha < \phi_a)$$

une suite transfinie du type ϕ_a , formée avec tous les ensembles de $\mathfrak{F}$ et telle que chaque ensemble de $\mathfrak{F}$ apparaisse a fois dans (2). Pour chaque α , définissons P_α , par induction par rapport à α , comme le premier terme de (1) contenu dans E_α et qui n'a pas été choisi à une étape antérieure de l'induction; un tel terme existe toujours, car jusqu'à l'étape α ($\alpha < \phi_a$) on a choisi un nombre inférieur à a d'éléments de (1), tandis que E_α contient a éléments. Par ce processus on va choisir, de chaque E_α , a éléments. Un élément de (1) n'est choisi que d'un seul ensemble E_α et au plus une fois.

Désignons par u_α^γ l'élément choisi de E_α à l'étape γ et posons $A_\gamma = \{u_\alpha^\gamma\}_{1 \leq \alpha < \phi_a}$ pour $\gamma > 2$ et $A_1 = X - \bigcup_{2 \leq \gamma < \phi_a} A_\gamma$. Pour $1 \leq \lambda \leq \aleph_0$, en vertu d'un théorème bien connu (voir, par exemple, [7, p. 233]) on peut ranger les ensembles A_γ ($1 \leq \gamma < \phi_a$) dans λ suites transfinies du type ϕ_a : $B_1^i, B_2^i, \dots, B_\gamma^i, \dots$ ($\gamma < \phi_a$), $i = 1, 2, \dots, \lambda$. Les ensembles B_γ^i satisfont les conditions de l'énoncé.

2. Représentation d'une fonction comme somme, produit ou limite de fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Considérons un ensemble amorphe Y et une fonction g définie sur X et ayant les valeurs dans Y . (On peut avoir $Y = X$.) Nous dirons que g jouit de la *propriété de Darboux au sens fort par rapport à la famille $\mathfrak{F}$ et à l'ensemble Y* si pour chaque ensemble E de la famille $\mathfrak{F}$ on a $g(E) = Y$.

Si Y est l'ensemble des nombres réels, alors nous supprimons les derniers mots "et à l'ensemble Y ."

THÉORÈME 1. *Si Y est un groupe additif de cardinal a , alors chaque fonction définie sur X et ayant les valeurs dans Y est une somme de deux fonctions jouissant de la propriété de Darboux au sens fort par rapport à la famille $\mathfrak{F}$ et au groupe Y .*

Démonstration. Soit

$$(3) \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\gamma, \dots$$

une suite du type ϕ_a formée avec tous les éléments de Y .

Il existe, en vertu du lemme (avec $\lambda = 2$), deux suites du type ϕ_a :

$$B_1^i, B_2^i, \dots, B_\gamma^i, \dots \quad (i = 1, 2)$$

où les ensembles B_γ^i et $B^i = \bigcup B_\gamma^i$ jouissent des propriétés 1° et 2° de l'énoncé du lemme.

Définissons deux fonctions f_1 et f_2 de la manière suivante:

$$f_1(x) = \begin{cases} \xi_\gamma, & \text{si } x \in B_\gamma^1, \\ f(x) - \xi_\gamma, & \text{si } x \in B_\gamma^2, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) - \xi_\gamma, & \text{si } x \in B_\gamma^1, \\ \xi_\gamma, & \text{si } x \in B_\gamma^2. \end{cases}$$

Soient: E un ensemble de la famille $\mathfrak{F}$ et ξ un élément de Y . Pour montrer que f_i ($i=1, 2$) jouit de la propriété de Darboux au sens fort par rapport à la famille $\mathfrak{F}$ et au groupe Y il faut prouver qu'il existe un $x_i \in E$ tel que $f_i(x_i) = \xi$. Or, il existe un $\gamma < \phi_a$ tel que $\xi = \xi_\gamma$. D'autre part, en vertu du lemme (propriété 2°) B_γ^1 rencontre chaque ensemble de la famille $\mathfrak{F}$. En particulier, on a $B_\gamma^1 \cap E \neq \emptyset$. Soit alors $x_i \in B_\gamma^1 \cap E$. En vertu de la définition des fonctions f_i on a $f_i(x_i) = \xi_\gamma$. Mais $\xi_\gamma = \xi$, donc le théorème est établi.

COROLLAIRE 1. *Chaque fonction réelle f définie dans R^n est une somme de deux fonctions dont chacune transforme tout ensemble parfait de R^n dans l'ensemble de tous les nombres réels.*

Pour établir ce corollaire, il suffit tenir compte que la famille $\mathfrak{F}$ de tous les ensembles parfaits de R^n a la puissance du continu.

REMARQUE. C'est I. Halperin qui a considéré, le premier, cette espèce de "propriété de Darboux" qui consiste en ce que chaque ensemble parfait est transformé dans l'ensemble de tous les nombres réels. Il a démontré l'existence d'une telle fonction dans [2]. En tenant compte que tout ensemble parfait contient $2^{\aleph_0}$ ensembles parfaits disjoints, il s'ensuit que la fonction considérée par I. Halperin prend chaque valeur réelle $2^{\aleph_0}$ fois sur tout ensemble parfait.

COROLLAIRE 2 (W. SIERPINSKI). *Chaque fonction réelle définie dans un espace Z métrique connexe séparable est une somme de deux fonctions dont chacune transforme tout ensemble fermé, contenant $2^{\aleph_0}$ points (en particulier, tout ensemble connexe, fermé, contenant plus d'un point) et contenu dans Z dans l'ensemble de tous les nombres réels.*

En effet, tout ensemble connexe, fermé, contenant plus d'un point et contenu dans un espace métrique connexe séparable a la puissance du continu.

REMARQUE. Pour établir le Théorème 1 nous avons utilisé le lemme avec $\lambda=2$. Si nous utilisons le lemme avec un $\lambda \geq 2$ fini quelconque, alors on obtient

THÉORÈME 1'. *Si Y est un groupe additif de cardinal a et si n est un entier positif > 1 , alors chaque fonction définie sur X et ayant les valeurs dans Y est une somme de n fonctions jouissant de la propriété de Darboux au sens fort par rapport à la famille $\mathfrak{F}$ et au groupe Y .*

Nous allons maintenant établir le

THÉORÈME 2. *Si Y est un corps de cardinal a , alors chaque fonction f*

définie sur X et ayant les valeurs dans Y , est le produit de deux fonctions ψ_1 et ψ_2 telles que, pour tout ensemble $E \in \mathfrak{F}$, on ait $\psi_1(E) \supseteq (Y - \{0\}) \subseteq \psi_2(E)$.

Démonstration. Soit

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\alpha, \dots$$

une suite du type ϕ_α formée avec tous les éléments $\neq 0$ de Y . Faisons usage du lemme, avec $\lambda = 2$. Posons, avec les notations du lemme,

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \eta_\gamma, & \text{si } x \in B_\gamma^1, \\ \frac{f(x)}{\eta_\gamma}, & \text{si } x \in B_\gamma^2, \end{cases} \quad \psi_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\eta_\gamma}, & \text{si } x \in B_\gamma^1, \\ \eta_\gamma, & \text{si } x \in B_\gamma^2. \end{cases}$$

Il est visible, à cause des propriétés des ensembles B_γ , que les fonctions ψ_1 et ψ_2 satisfont les propriétés de l'énoncé.

Soit f une fonction réelle définie dans R^n . Supposons que pour tout ensemble parfait $P \subset X$ et pour chaque couple de points $x \in P$, $y \in P$, où $f(x) < f(y)$, il y a, pour d tel que $f(x) < d < f(y)$, un $z \in P$ tel que $f(z) = d$. Nous dirons, dans ce cas, que f jouit de la *propriété de Darboux au sens restrictif*. C'est une propriété plus forte que la propriété de Darboux au sens ordinaire.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 2. Si f est une fonction réelle définie dans R^n , alors $|f|$ est le produit de deux fonctions jouissant de la *propriété de Darboux au sens restrictif*.

Pour démontrer ce corollaire il suffit tenir compte que la famille de tous les ensembles parfaits de R^n a la puissance du continu.

REMARQUE. Il existe une fonction réelle d'une variable réelle qui n'est pas le produit de deux fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Soit, par exemple, $f(x) = -1$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ pour $x > 0$. Si on avait $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, f_1 et f_2 jouissant de la propriété de Darboux, alors une au moins des f_1 et f_2 prendrait la valeur 0 au moins en un point et en ce point f serait aussi nulle, contrairement à sa définition.

THÉORÈME 3. Si Y est un ensemble de cardinal α et si f est une fonction définie sur X et ayant les valeurs dans Y , alors il existe une suite $f_1, f_2, \dots, f_\alpha, \dots$ de fonctions jouissant de la *propriété de Darboux au sens fort* par rapport à $\mathfrak{F}$ et Y , avec la *propriété suivante*: Pour chaque $x \in X$ il y a un entier positif p_x tel que $f_n(x) = f(x)$ quelque soit $n \neq p_x$.

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme avec $\lambda = \aleph_0$. Définissons les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ de la manière suivante:

$$f_n(x) = \begin{cases} \xi_\gamma, & \text{si } x \in B_\gamma^n, \\ f(x), & \text{si } x \notin B_\gamma^n, \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

où par ξ_γ on a désigné le terme général de la suite (3) et par B_γ^n les ensembles de l'énoncé du lemme. Soient: ξ un élément quelconque de Y et E un ensemble de $\mathfrak{F}$. Il y a un γ tel que $\xi = \xi_\gamma$. D'après les propriétés des ensembles B_γ^n on a $E \cap B_\gamma^n \neq \emptyset$ pour $1 \leq \gamma < \phi_\alpha$ et $1 \leq n < \aleph_0$. Soit alors $x_0 \in E \cap B_\gamma^n$. On a $f_n(x_0) = \xi$. Donc f_n jouit de la propriété de Darboux au sens fort par rapport à $\mathfrak{F}$ et Y .

Soit maintenant $x \in X$. En vertu du lemme (propriété 1°) il existe un entier positif p et un ordinal α tels que $x \in B_\alpha^p$. Cet ensemble est uniquement déterminé, car les ensembles B_γ^n sont disjoints deux à deux. On a

$$f_p(x) = \xi_\alpha, \quad f_n(x) = f(x) \text{ pour } n = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots$$

et le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1. *Toute fonction réelle, définie dans R^n , est la limite d'une suite convergente de fonctions dont chacune transforme chaque ensemble parfait de R^n dans l'ensemble de tous les nombres réels.*

COROLLAIRE 2 (W. SIERPINSKI). *Toute fonction réelle définie dans un espace Z métrique connexe séparable est la limite d'une suite de fonctions dont chacune transforme chaque ensemble fermé contenant $2^{\aleph_0}$ points (en particulier, chaque ensemble connexe, fermé, contenant plus d'un point) et contenu dans Z dans l'ensemble de tous les nombres réels.*

Afin d'établir ces corollaires il faut utiliser les explications données pour les Corollaires 1 et 2 du Théorème 1.

REMARQUES. Certains cas particuliers des théorèmes donnés dans ce travail peuvent être établis par une voie directe, c'est à dire sans faire appel au lemme. Ainsi, par exemple, en utilisant la décomposition donnée par Vitali pour démontrer l'existence d'un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue ou la décomposition donnée par les ensembles de niveau de certaines solutions discontinues de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$, on obtient:

Chaque fonction réelle d'une variable réelle est la somme de deux fonctions et la limite d'une suite de fonctions dont chacune transforme tout intervalle réel dans l'ensemble de tous les nombres réels (W. Sierpinski). Si, en outre, f est positive, alors f est le produit de deux fonctions jouissant de la propriété de Darboux.

En utilisant une décomposition de l'ensemble des nombres réels en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun rencontre tout ensemble réel parfait (voir, par exemple, [3], démonstration du dernier théorème) on obtient aussi par une voie directe:

Toute fonction réelle de variable réelle est la somme de deux fonctions et la limite d'une suite de fonctions, dont chacune transforme tout ensemble réel parfait dans l'ensemble de tous les nombres réels.

OUVRAGES CITÉS

1. F. Bernstein, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, Leipz. Ber. vol. 60 (1908) pp. 325–338.
2. I. Halperin, *Discontinuous functions with the Darboux property*, Amer. Math. Monthly vol. 57 (1950) pp. 539–540.
3. ———, *Non-measurable sets and the equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$* , Proc. Amer. Math. Soc. vol. 2 (1951) pp. 221–224.
4. C. Kuratowski et W. Sierpinski, *Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires*, Fund. Math. vol. 8 (1926) pp. 193–200, Lemme 1.
5. W. Sierpinski, *Sur une propriété des fonctions réelles quelconques*, Matematiche, Catania, vol. 8 (1953) pp. 43–48.
6. ———, *Sur une propriété des fonctions réelles quelconques, définies dans les espaces métriques*, Matematiche, Catania, vol. 8 (1953) pp. 73–78.
7. ———, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

INSTITUTUL DE MATEMATICĂ,
BUCHAREST, ROMANIA